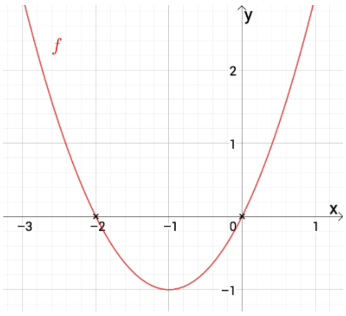
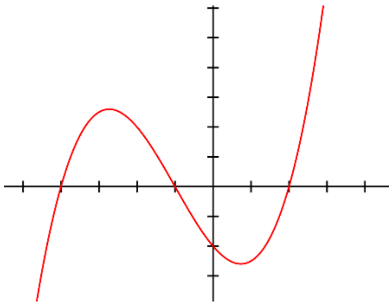
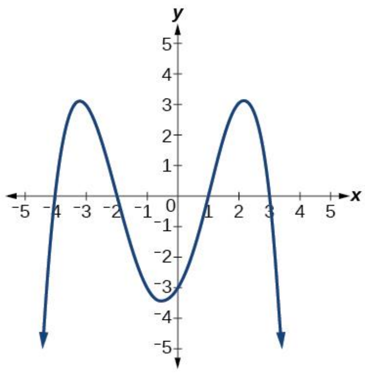
Mehrfache Nullstellen

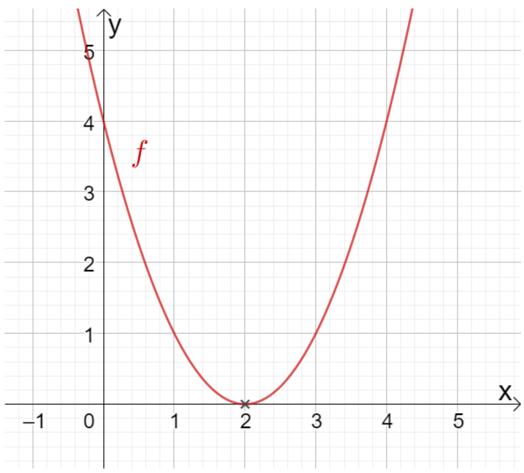




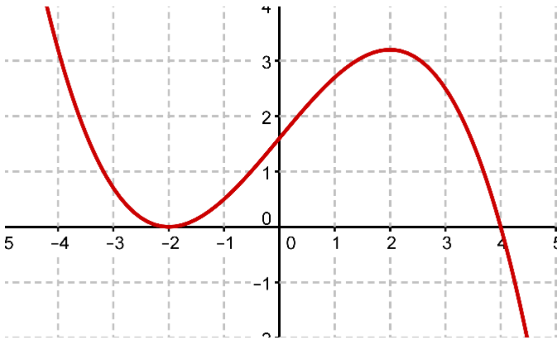


Aufgabe:
Gegeben sind die Graphen dreier Funktionen. Bestimme den Grad der Funktionen und lies die Anzahl der Nullstellen ihrer Graphen ab.

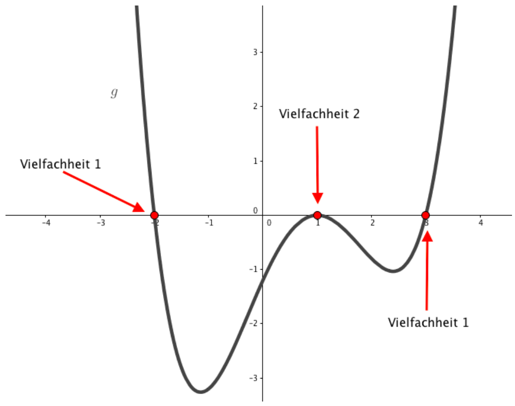
Eine ganzrationale Funktion f vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.



Dieser Graph hat bei x = 1 eine **doppelte Nullstelle**, weil hier zwei Nullstellen zusammenfallen.

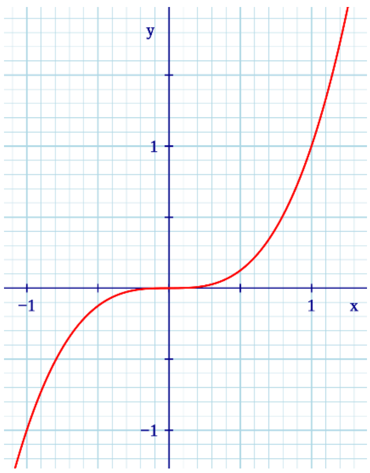


Dieser Graph einer Funktion vom Grad 3 hat bei x = – 2 eine **doppelte Nullstelle**, weil hier zwei Nullstellen zusammenfallen. Die andere Nullstelle bei x = 4 ist eine **einfache Nullstelle**.



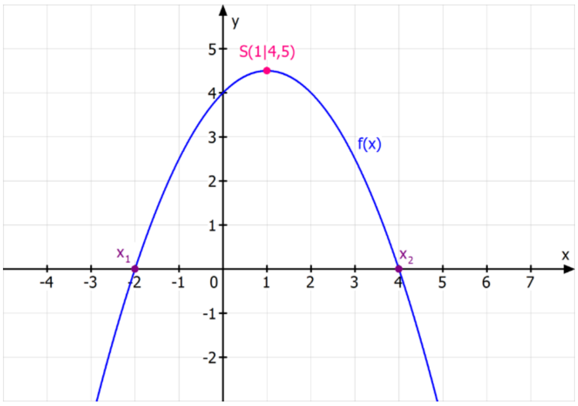
Dieser Graph einer Funktion vom Grad 4 hat bei x = 1 eine **doppelte Nullstelle**, weil hier zwei Nullstellen zusammenfallen. Die anderen beiden Nullstellen bei x = – 2 und x = 3 sind einfache Nullstellen.

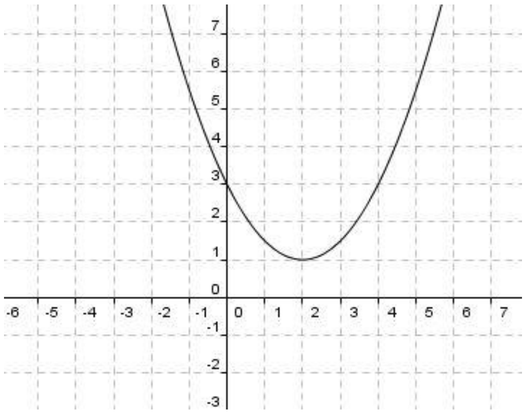
Doppelte Nullstellen erkennt man daran, dass sie die x-Achse nur ________________ .

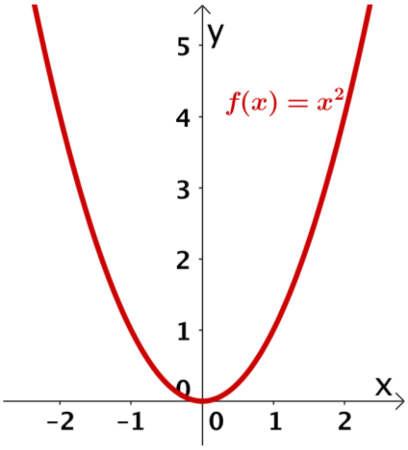


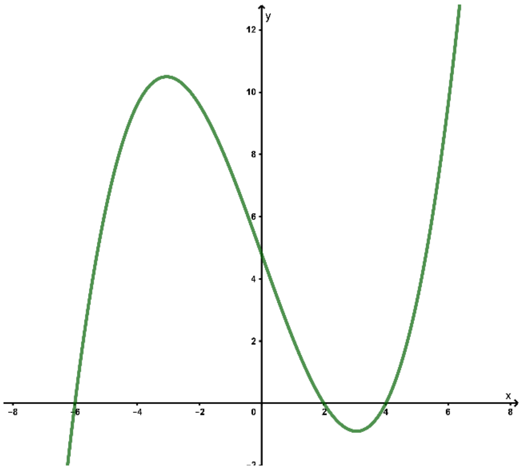
Dieser Graph hat bei x = 0 eine **dreifache Nullstelle**, weil hier drei Nullstellen zusammenfallen. Dreifache Nullstellen bilden einen so genannten **Sattelpunkt**.

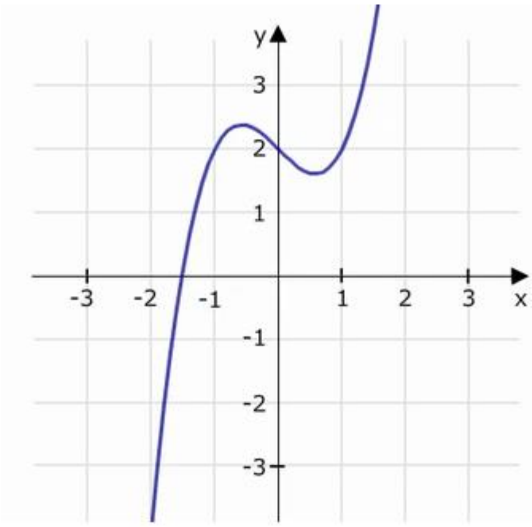
Aufgabe:
Untersuche die Graphen auf den Grad ihrer Funktionen sowie auf einfache und mehrfache Nullstellen.

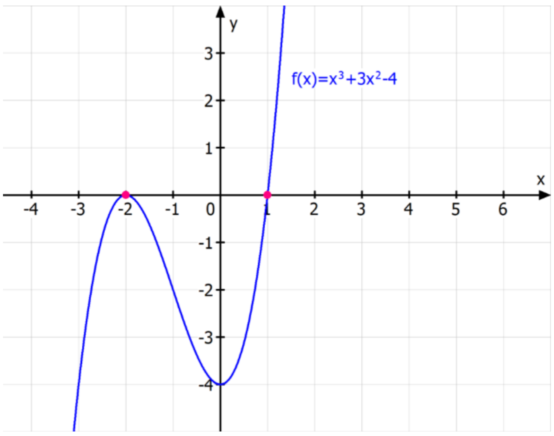


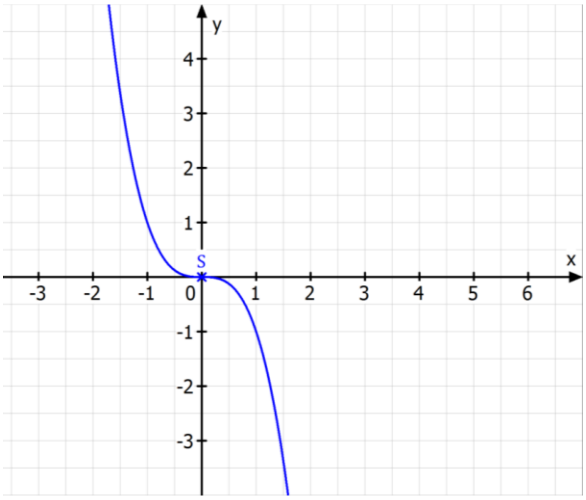


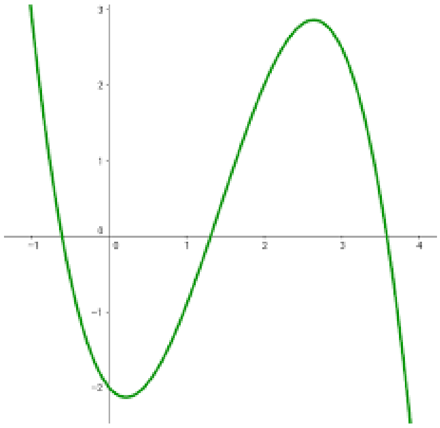


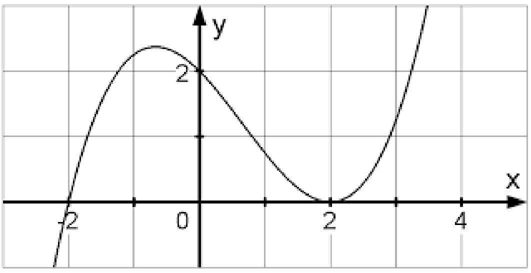


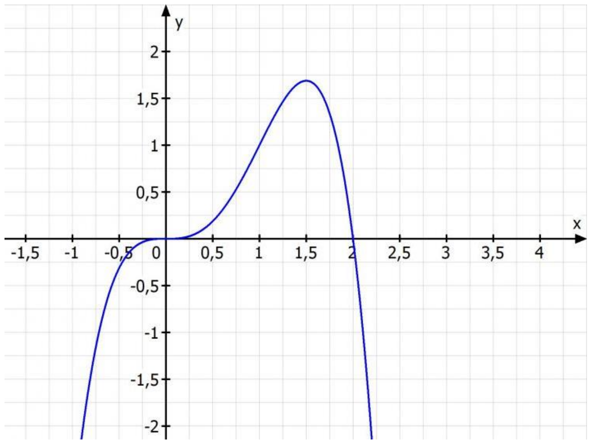


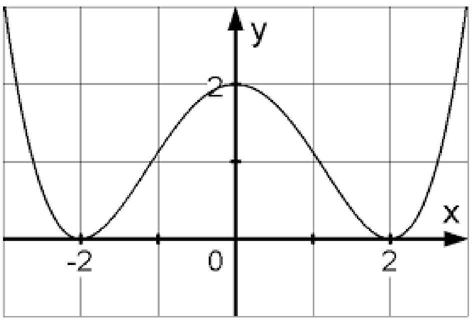


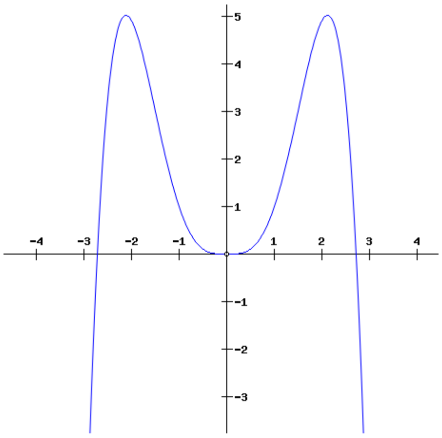

y
4
3
2
1
S
x
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3

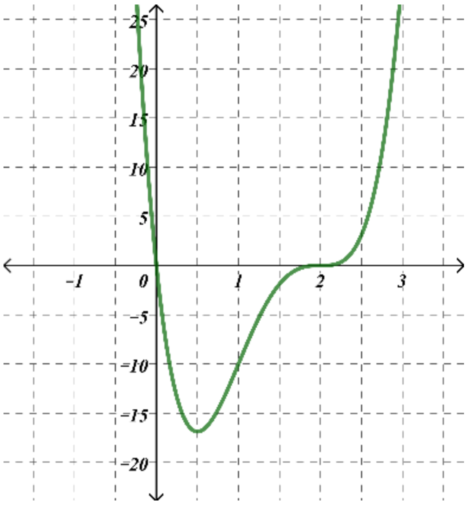


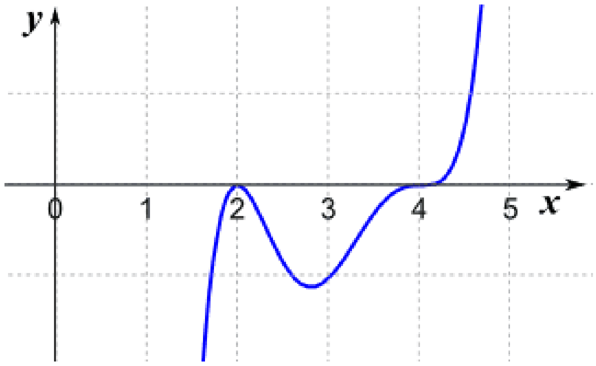

y
2
x
-2
0
2
4

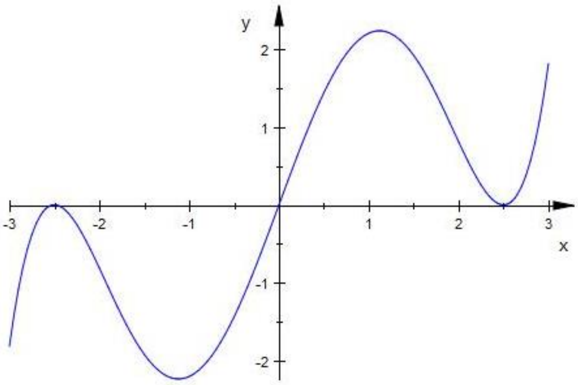

y
2
1,5
1
0,5
x
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
-0,5
-1
-1,5
-2

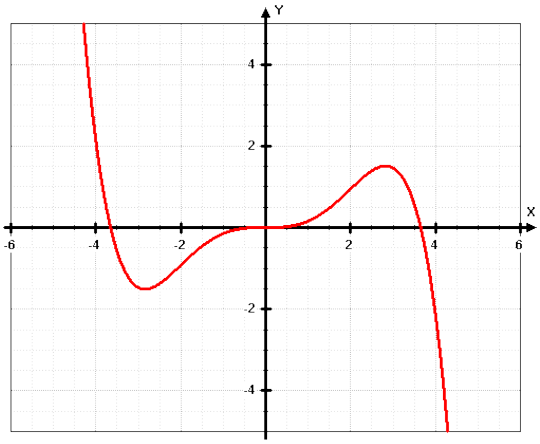

y
2
x
-2
0
2

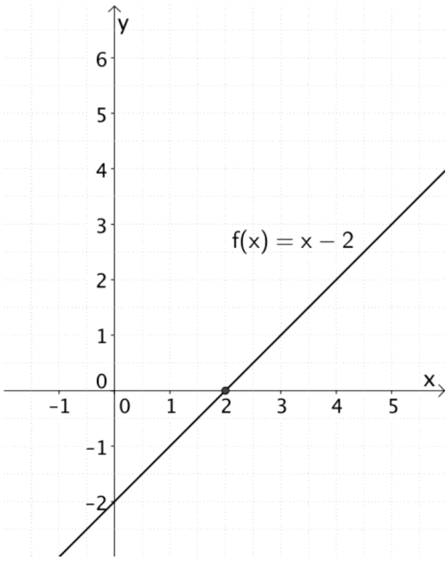

5
4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-1
-2
-3

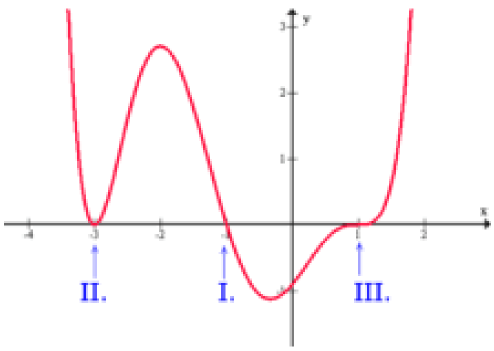

25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-1
1
2
3

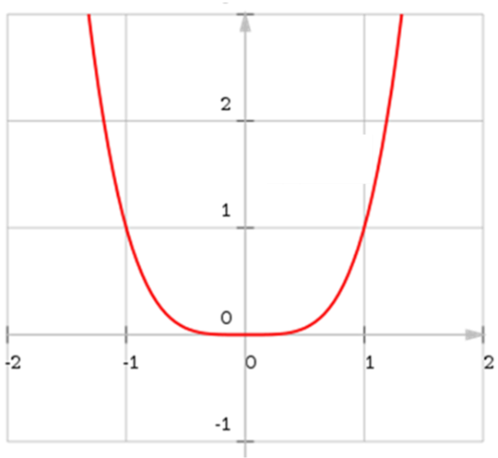

y
x
0
1
2
3
4
5

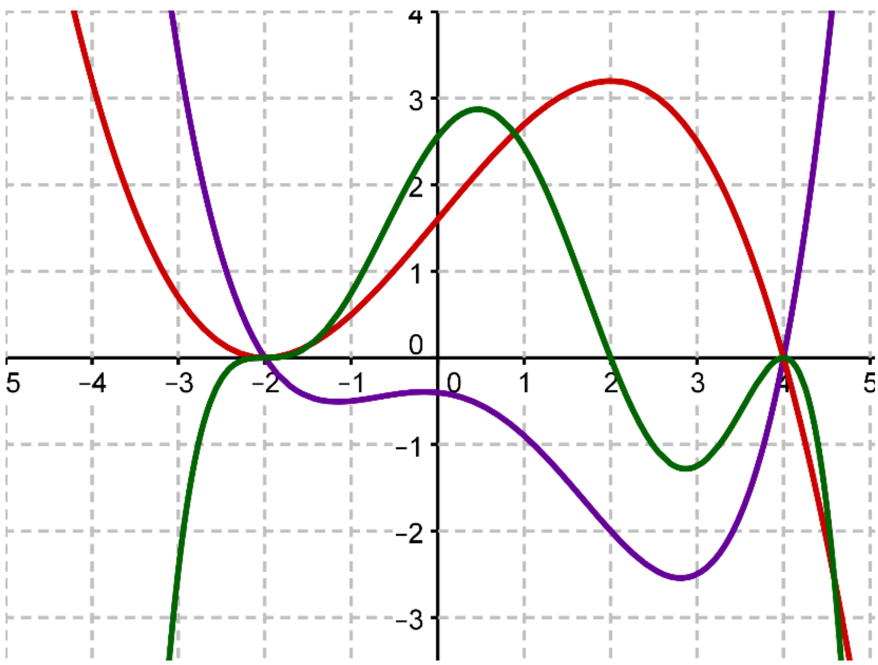

y
x
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
1
2
3


Y
X
4
2
-2
-4
-6
-4
-2
2
4
6


y
x
f(x) = x − 2
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
5


II.
I.
III.





Aufgabe:

$f(x) = 3(x + 3)(x + 3)(x - 8)$

$g(x) = x(x - 3)(x + 3)(x - 8)$

$h(x) = (x - 3)(x + 3)(x - 8)^2$

$i(x) = (x^2 - 9)(x - 8)$

$j(x) = 5 \cdot (x - 3)(x + 3)(x - 8)$

$k(x) = (x^2 - 9)(x + 8)$

a) Welche Funktionen haben genau die drei Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 8$?
b) Welche Funktionen haben eine zweifache Nullstelle? Geben Sie diese an.

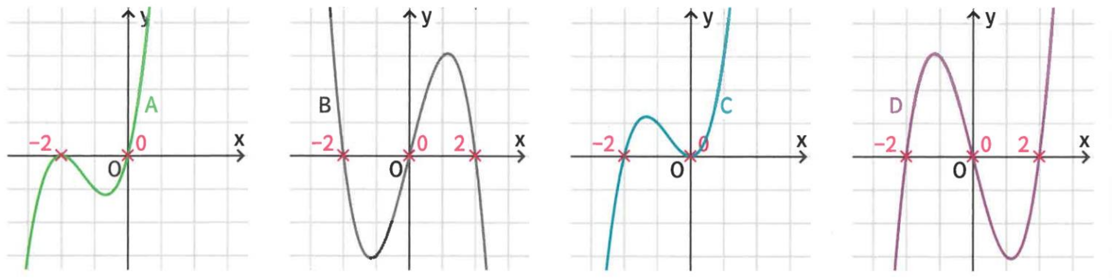
Aufgabe:
Geben Sie eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades an, die genau die angegebenen Nullstellen besitzt, wobei keine mehrfache Nullstelle dabei ist.

a) $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -2$

b) $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = -\frac{1}{3},\ x_3 = 0$

Aufgabe:
Ordnen Sie jeder Funktion den passenden Graphen zu.

$f(x) = x(x+2)^2$ $\quad g(x) = x(x-2)(x+2)$ $\quad h(x) = -x(x-2)(x+2)$ $\quad i(x) = x^2(x+2)$



Aufgabe:
Geben Sie eine ganzrationale Funktion f mit möglichst niedrigem Grad an.

a) f hat die Nullstellen – 5; 0,5; und 2.

b) Der Graph von f schneidet die x-Achse an den Stellen – 3 und 3 und berührt sie bei 0.

Lösungen

Buch Seite 27 Nr. 1

$f(x) = 3(x+3)(x+3)(x-8)$ $g(x) = x(x-3)(x+3)(x-8)$ $h(x) = (x-3)(x+3)(x-8)^2$

$i(x) = (x^2-9)(x-8)$ $j(x) = 5 \cdot (x-3)(x+3)(x-8)$ $k(x) = (x^2-9)(x+8)$

c) Welche Funktionen haben genau die drei Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 8$?
Lösung:
g(x)
Buch:
Die Funktionen h, i und j haben genau die drei angegebenen Nullstellen. Die Funktion g hat noch zusätzlich die Nullstelle $x_4 = 0$.

d) Welche Funktionen haben eine zweifache Nullstelle? Geben Sie diese an.
Lösung:
f(x) bei x = – 3
h(x) bei x = 8, weil die Klammer hoch 2 ist
Buch:
Die Funktion f hat die doppelte Nullstelle x = – 3; die Funktion h hat die doppelte Nullstelle x = 8.

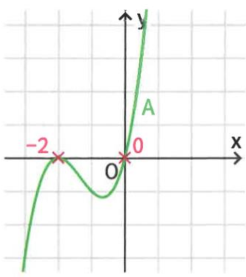
Buch Seite 27 Nr. 2
Geben Sie eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades an, die genau die angegebenen Nullstellen besitzt, wobei keine mehrfache Nullstelle dabei ist.

c) $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$
$f(x) = x \cdot (x+1) \cdot (x+2)$

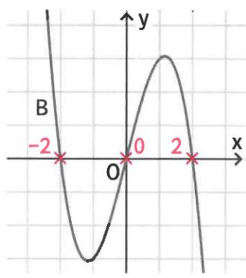
d) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = 0$
$g(x) = (x + \sqrt{2}) \cdot (x + \frac{1}{3}) \cdot x$
Buch:
Individuelle Lösungen, z.B. …

Buch Seite 28 Nr. 3
Ordnen Sie jeder Funktion den passenden Graphen zu.

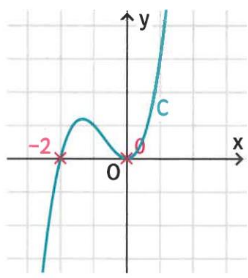
$f(x) = x(x+2)^2$



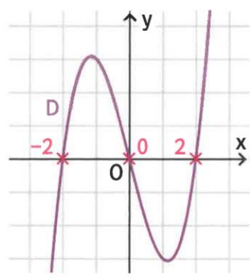
$g(x) = x(x-2)(x+2)$



$h(x) = -x(x-2)(x+2)$



$i(x) = x^2(x+2)$



<u>Lösungen:</u>
Alle Funktionen und Graphen sind vom Grad 3.
f(x) gehört zu A, weil bei – 2 eine doppelte Nullstelle
Buch:
f hat die einfache Nullstelle x_1 = 0 und die zweifache Nullstelle x_2 = – 2. Zu f gehört Graph A.

h(x) gehört zu B, weil drei einzelne Nullstellen und gespiegelt
Buch:
h hat die einfachen Nullstellen x_1 = – 2, x_2 = 0 und x_3= 2. Für h kommen Graph B oder Graph D infrage. Für x → + ∞ gilt g (x) → – ∞ und für x → – ∞ gilt g (x) → + ∞. Daher gehört zu h Graph B.

i(x) gehört zu C, weil eine doppelte Nullstelle im Ursprung
Buch:
i hat die zweifache Nullstelle x_1 = 0 und die einfache Nullstelle x_2 = – 2. Zu i gehört Graph C.

g(x) gehört zu D, weil drei einzelne Nullstellen und nicht gespiegelt
Buch:
g hat die einfachen Nullstellen x_1 = – 2, x_2 = 0 und x_3= 2. Für g kommen Graph B oder Graph D infrage. Für x → + ∞ gilt g (x) → + ∞ und für x → – ∞ gilt g (x) → – ∞. Daher gehört zu g Graph D.

Buch Seite 28 Nr. 4 Test
Geben Sie eine ganzrationale Funktion f mit möglichst niedrigem Grad an.

c) f hat die Nullstellen – 5; 0,5; und 2.
   <u>Lösung:</u>
   f (x) = (x + 5) · (x – 0,5) · (x – 2), Funktion mindestens vom Grad 3
d) Der Graph von f schneidet die x-Achse an den Stellen – 3 und 3 und berührt sie bei 0.
   <u>Lösung:</u>
   Funktion mindestens vom Grad 4:
   f (x) = x^2 · (x + 3) (x – 3)